Datas de Exame:

1.ª época – 30/06 – 10h

2.ª época – 10/07 – 10h

Spec R com R ≡ anel Noetheriano

Temos correspondência

$$R \underset{\text{ideal}}{\supset} \mathfrak{a} \longmapsto V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} R$$

entre ideais e fechados de Spec R

t.q.

- $V\left(\sum_i \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_i V(\mathfrak{a}_i)$
- $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$
- $V(R) = \emptyset$ e $V(\langle 0 \rangle) = \operatorname{Spec} R$

Temos tb correspondência

$$\operatorname{Spec} R \supset X \longmapsto I(X) \subset R \text{ ideal}$$

tq.

$$I(X) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} \subset R$$

<u>NB</u>:

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

<u>Prop</u>: Spec R é um espaço topológico Noetheriano, i.e., toda a cadeia decrescente de fechados estabiliza.

<u>Cor</u>: Se $X \subset \operatorname{Spec} R$ é fechado, então

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r$$

onde os X_i's são fechados irredutíveis e $i \neq j \Rightarrow X_i \not\subset X_j$.

Prop: Seja R como acima (Noetheriano) e seja $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal, então

1. O conjunto

$$S = \{ \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{p} \text{ é primo minimal de } \mathfrak{a} \} \subset \operatorname{Spec} R$$

é finito, digamos $S = \{ \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r \}$

2. $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$

3. Se R tem divisores de zero, então ou $\operatorname{nil} R \neq \langle 0 \rangle$ ou R tem pelo menos dois primos minimais

1. Os primos minimais de $\mathfrak{a}$ correspondem às componentes irredutíveis de $V(\mathfrak{a})$.

2. $$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$$

3. Temos

$$\mathrm{nil}\, R = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R} \mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$$

onde $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ são os primos minimais de R (i.e. de $\mathfrak{a} = \langle 0 \rangle$).

Se R tem divisores de zero, $\langle 0 \rangle \notin \mathrm{Spec}\, R$.

Se $r = 1$, então $\mathrm{nil}\, R = \mathfrak{p}_1 \neq \langle 0 \rangle$.

$\therefore$ ou há mais que um primo minimal ou há nilpotentes não nulos. $\square$

<u>NB</u>: Na correspondência $\mathfrak{a} \longmapsto V(\mathfrak{a})$ podemos dizer que

1. estabelece uma bijecção entre ideais radicais e fechados de Spec R

2. Se $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$

$$V(\mathfrak{a}) \text{ irredutível}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathfrak{a} \text{ é primo.}$$

Primos Associados (ou Assassinos) de um Módulo:

Def: Seja $M \in R$-mod. Um primo associado de M é um $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ tq.

$$\exists \text{ homomorfismo injetivo } R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M.$$

Notação:

$$\operatorname{Ass} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \text{ é associado de } M\}$$

NB: $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M \iff \exists m \in M$:

$$\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(m)$$

Dem: 1. $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$

$$R/\mathfrak{p} \to M$$
$$\kappa(x) \longmapsto xm$$

é injetivo.

2. Se $\varphi : R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ então

$$\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(\varphi(1)).$$

Exemplo: $\mathrm{Ass}\Big(\overbrace{\mathbb{Z}/\langle p^r q^s \rangle}^{M}\Big)$, com

$p, q \in \mathbb{Z}$ primos e $r, s \in \mathbb{N}$, = ?

$$\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} = \{\langle 0 \rangle\} \cup \{\langle p \rangle \mid p \in \mathbb{N} \text{ primo}\}$$

$$\mathrm{Ass}(M) = \{p, q\}$$

<u>Exemplo</u>: $R = k[x,y,z]$

$$M = R/\langle x\rangle \oplus R/\langle x,y\rangle$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ass}(M) = \{\langle x\rangle, \langle x,y\rangle\}$$

Prop: Seja $M \in R\text{-mod}$

1. Se $m \in M$ tq. $\mathrm{Ann}(m) = \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} R$, então

$$\forall_{m' \in \langle m \rangle - 0} : \mathrm{Ann}(m') = \mathfrak{p}$$

Em particular $\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} R$

2. Todo o elemento maximal de

$$\{\mathrm{Ann}(m) \mid m \in M - \langle 0 \rangle\}$$

é primo, logo pertence a $\mathrm{Ass} M$

3. Se R é Noetheriano e $M \neq \langle 0 \rangle$ então $\operatorname{Ass} M \neq \emptyset$

4. Se $N \subset M$ é submódulo, então
$$\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Ass} N \cup \operatorname{Ass} M/N.$$

<u>Dem</u>: 1. Seja $y \in \langle m \rangle$: $y = am$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ann}(y) &= \operatorname{Ann}(am) = \{ b \in R \mid bam = 0 \} \\
&= \{ b \in R \mid ba \in \mathfrak{p} \} \\
&\underset{\text{se } y \neq 0}{=} \{ b \in R \mid b \in \mathfrak{p} \} = \mathfrak{p}
\end{aligned}$$

2. Seja $\mathfrak{P} \in \{ \operatorname{Ann}(m) \mid m \in M - 0 \}$ maximal neste conjunto. Temos

$$ab \in \mathfrak{P} \iff abm = 0$$

Se $a, b \notin \mathfrak{P}$, temos

$$\operatorname{Ann}(m) \subsetneq \operatorname{Ann}(am) \neq R$$

$\times$ com maximalidade

$\therefore \mathfrak{P}$ é primo

3. Se R é Noetheriano e $M \neq 0$,

então $$\{ \mathrm{Ann}(m) \mid m \in M - \langle 0 \rangle \}$$

é $\neq \emptyset$, logo tem elemento maximal,

que por 2. $\in \mathrm{Ass}\, M$.

4. $L \subset M$ tq. $L \simeq R/\mathfrak{p}$

$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$. $\Rightarrow$

1. $L \cap N = \langle 0 \rangle \Rightarrow L \hookrightarrow M/N$

ou

2. $L \cap N \neq \langle 0 \rangle \Rightarrow$

$$L \cap N \simeq R/\mathfrak{p}$$

13

Cor: Se R é Noetheriano e $M \in R\text{-mod}$, então

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M} \mathfrak{p} = \{x \in R \mid x \text{ é divisor de zero em } M\}.$$

Dem: x é divisor de zero em M sse $\exists\, m \in M - \{0\}$ t.q. $x \in \mathrm{Ann}(m)$.

Tomando $\mathrm{Ann}(m)$ com esta propriedade vem

$$\mathrm{Ann}(m) = \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$$

$\therefore$ Temos $\supseteq$

Reciprocamente, se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$,

então $\exists\, m \in M - \{0\}$ t.q. $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$

$\therefore\ \mathfrak{p} \subset$ divisores de zero de M.

$\square$

<u>Exemplo</u>: $\mathrm{Ass}\,(\mathbb{Z}/\underbrace{\langle pq^s \rangle}_{M})$

$= \{\langle p \rangle, \langle q \rangle\}$

$\Rightarrow\ z \in \langle p \rangle \cup \langle q \rangle$ sse

z é divisor de zero em M.

Relação entre Ass M e Supp M

__Teorema__: Seja M e R-mod. Então

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \Longrightarrow V(\mathfrak{p}) \subset \mathrm{Supp}\, M$$

portanto $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Supp}\, M$.

Se, adicionalmente R é Noetheriano então

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp} \text{ minimal} \Rightarrow \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M.$$

__NB__: Recorde-se que se M é f.g.

$\mathrm{Supp}\, M = V(\mathrm{Ann}\, M)$

<u>Dem</u>: 1. Temos $(R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = \kappa(\mathfrak{p})$
$:= \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$.

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M \iff R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$$
$$\Rightarrow \kappa(\mathfrak{p}) \hookrightarrow M_{\mathfrak{p}}$$
$$\Rightarrow \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M.$$

Mais $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p} \Rightarrow M_{\mathfrak{q}} \neq 0$ pois $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ é uma localização de $M_{\mathfrak{q}}$.

$\therefore V(\mathfrak{p}) \subset \mathrm{Supp}\, M$
se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M$.

2. Seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M$ é minimal:

...

$$M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \quad \wedge \quad \forall_{\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}}\, M_{\mathfrak{q}} = 0$$

<u>A provar</u>:

2.1 $\operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\}$

Temos $M_{\mathfrak{p}} \in \underbrace{R_{\mathfrak{p}}\text{-mod}}_{\text{Noetheriano}} \Rightarrow \operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \neq \emptyset$

$$\operatorname{Spec} R_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R\}$$

e $M_{\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}} = M_{\mathfrak{q}} = 0 \quad \forall_{\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}}$:

$\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$

$$\therefore \operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\}.$$

2.2 - Falta provar: $\exists m \in M : Ann(m) = \mathfrak{p}$

Seja $m' \in M$ t.q. $m'/1 \in M_{\mathfrak{p}}$ o satisfaz

$$Ann_{R_{\mathfrak{p}}}(m'/1) = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$$

ou seja:

i. $\forall s \in R - \mathfrak{p} : sm' \neq 0$

ii. $\forall_{x \in \mathfrak{p}} \exists_{s_x \in R - \mathfrak{p}} : s_x x m' = 0$

Como $\mathfrak{p}$ é f.g. $\exists_{s \in R - \mathfrak{p}}$ t.q.

$$Ann(sm') = \mathfrak{p}$$

$\therefore \mathfrak{p} \in Ass(M)$.

$\blacksquare$

Cor.: Se R é Noetheriano e $M \in R\text{-mod}$ f.g. então

$$\operatorname{Supp} M = \bigcup_{i=1}^{n} V(\mathfrak{p}_i)$$

onde $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} R$ são os primos minimais de R contendo $\operatorname{Ann}(M)$ (correspondem às componentes irredutíveis de $V(\operatorname{Ann}(M))$).

Temos

$$\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} M, \quad i=1,\dots,n.$$

Dem.: Recorde-se que se M é f.g.

$$\operatorname{Supp} M = V(\operatorname{Ann}(M))$$

(em geral só temos $\subset$)

Por outro lado, se R é Noetheriano $V(\mathrm{Ann}(M))$ tem um nº finito de elementos minimais $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ t.q.

$$V(\mathrm{Ann} M) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \ldots \cup V(\mathfrak{p}_n)$$

Pelo teorema acima $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}\, M$.

$\boxed{\text{ES}}$

<u>NB</u>: podemos ter $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ sem ser minimal.

$\therefore$ Se R é Noetheriano e M é f.g. então $\mathrm{Supp}\, M$ e $\mathrm{Ass}\, M$

têm os mesmos elementos (ideais primos) minimais.

Desmontagem de um módulo sobre R Noetheriano:

Teorema: Seja R Noetheriano e M e R-mod f.g., então $\exists$ cadeia cadeia de submódulo

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$$

t.q. $M_i / M_{i-1} = R/\mathfrak{p}_i$ com $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} R$.

Temos $\operatorname{Ass} M \subset \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$

Em particular $\operatorname{Ass} M$ é finito.

<u>Dem</u>: Construímos indutivamente a cadeia. Temos $\operatorname{Ass} M \neq \emptyset$, logo $\exists\, \mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Spec} R$ e $\exists\, M_1 \subset M$ submódulo tq.

$$M_1 \simeq R/\mathfrak{p}_1 .$$

Suponhamos construída uma cadeia

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_r$$

tq. $M_i/M_{i-1} \simeq R/\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} R$

Se $M/M_r \neq 0 \Rightarrow$

$\exists\, \mathfrak{p}_{r+1} \in \operatorname{Spec} R : \mathfrak{p}_{r+1} \in \operatorname{Ass}(M/M_r) \neq \emptyset$

ou seja $\exists M_{r+1} \subset M$ t.q. $M_r \subset M_{r+1}$

e $$M_{r+1}/M_r \cong R/P_{r+1}.$$

Como M é Noetheriano, o processo termina num nº finito de passos.

com $M_n = M$.

$\square$

R/I com $I \subset R$ ideal

estudar estes módulos para dizer algo acerca de I.